Krive drugog reda

Kanonski oblik krivih drugog reda

1) Elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0, a\geq b)$

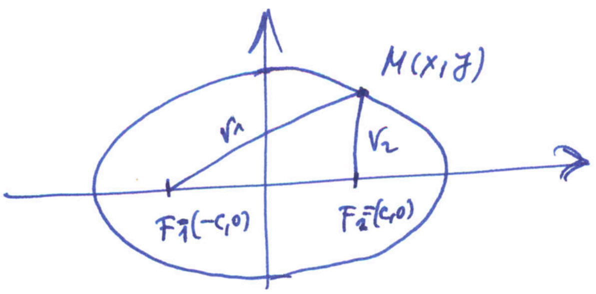
2) hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $a>0, b>0$

3) parabola $y^2=2px$

4) par pravih koje se sijeku
$a^2x^2-b^2y^2=0$ $(a\neq 0, b\neq 0)$

5) par paralelnih pravih (ili pravih koje se poklapaju)
$x^2-a^2=0$, $a\geq 0$

1) Elipsa je skup tačaka, kod kojih je suma rastojanja od dvije date tačke F_1 i F_2 konstantna i jednaka $2a$



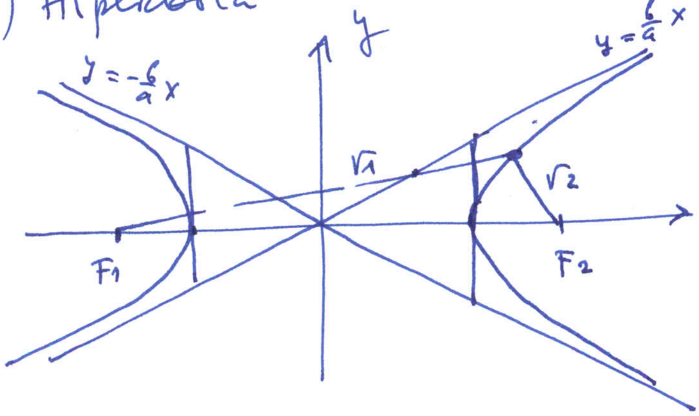
$c^2=a^2-b^2$

$\varepsilon=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$ - ekscentricitet elipse

$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ fokusi ili žiže elipse

$r_1+r_2=2a$, $a=b$ - kružnice $x^2+y^2=a^2$

2) Hiperbola



Tačke $(a,0)$ $(-a,0)$ tjemeni hiperbole

Hiperbola ne siječe osu Oy

$y=\pm\frac{b}{a}x$ asimptote hiperbole

$c^2=a^2+b^2$, $\varepsilon=\frac{c}{a}$ ekscentricitet hiperbole

$F_1=(-c,0)$, $F_2=(c,0)$ fokusi hiperbole

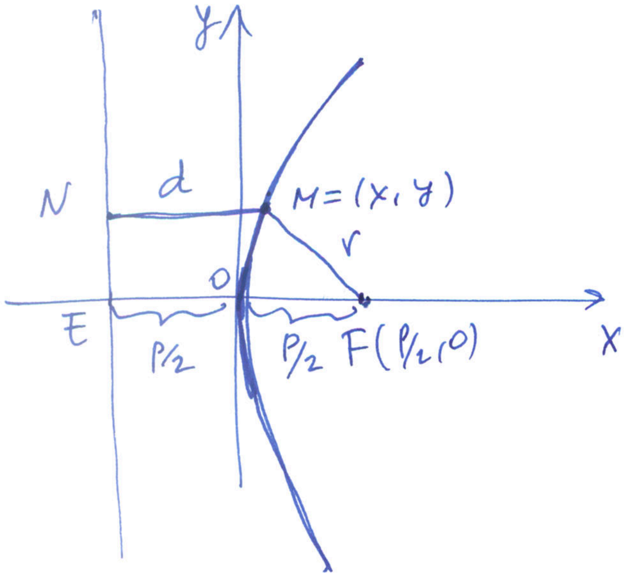
Skup tačaka iz ravni kod kojih je apsolutna veličina razlike rastojanja od tačaka F_1 i F_2 konstantna veličina i jednaka $2a$ je hiperbola.

3) <u>Parabola</u> $y^2 = 2px$

Tačke (x,y) i $(x,-y)$ pripadaju paraboli koji simetrična u odnosu na X-osu.

Tačka $(0,0)$ vrh parabole, Tačka $F = (\frac{p}{2}, 0)$ - fokus parabole

$r = |MF|$ - fokalni radijus tačke $M = (x,y)$ parabole



Parabola je skup tačaka koje su podjednako udaljene od fiksirane tačke F i fiksirane prave $x = -\frac{p}{2}$ - nju prava nazivamo direktrisom parabole.

4) $a \neq 0, b \neq 0$ $a^2x^2 - b^2y^2 = 0 \Leftrightarrow (ax - by)(ax + by) = 0$

$\Rightarrow$ ili je $ax - by = 0$ ili $ax + by = 0$

Opšta jednačina krivih drugog reda je

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Ako je determinanta $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$ $\left.\begin{matrix} > 0 \text{ - elipsa} \\ < 0 \text{ - hiperbola} \\ = 0 \text{ parabola} \end{matrix}\right| \Rightarrow$

Površi drugog reda. Cilindrične, konusne, rotacione <u>površi.</u>

Skup tačaka $M = (x,y,z)$ čije koordinate zadovoljavaju jednačinu $F(x,y,z) = 0$ nazivamo površ u $\mathbb{R}^3$.

Kažemo da tačka $M = (x,y,z)$ leži na površi (ili pripada površi) ako njene koordinate zadovoljavaju jednačinu površi $F(x,y,z) = 0$.

<u>Primjer</u> $2x - 3y + 5z - 6 = 0$ $\rightarrow$ ravan u prostoru $\mathbb{R}^3$

$F(x,y,z) = 2x - 3y + 5z - 6$ jedn površi

Presjek dvije površi u prostoru obrazuje krivu u prostoru. Drugim riječima, skup tačaka koje zadovoljavaju uslov:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

obrazuje krivu u prostoru.

1. Sfera

Skup tačaka u prostoru koje su na rastojanju r $(r>0)$ od neke fiksne tačke $O(a,b,c)$ obrazuje površ koju nazivamo sferom ili sfernom površi.

Neka je $M(x,y,z)$ proizvoljna tačka sa sfere.

Znamo da je, $r=|MO|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$.

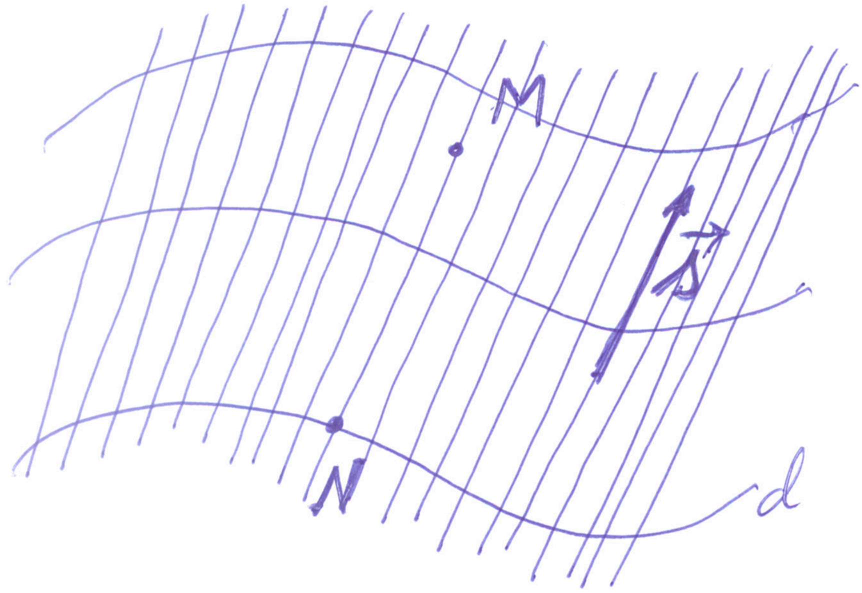
Odnosno, $\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2}$ što i jeste jednačina sfere s centrom u $O(a,b,c)$ poluprečnika r.

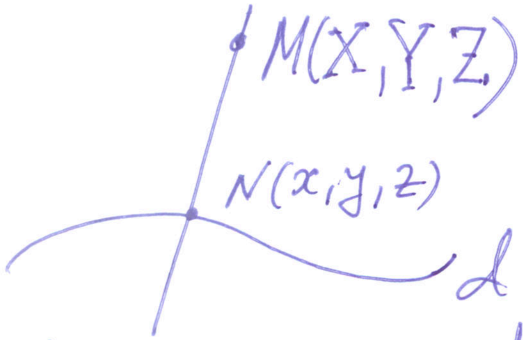
Specijalno, ako je $O(0,0,0)$ onda je $x^2+y^2+z^2=r^2$ jednačina sfere s centrom u $(0,0,0)$ poluprečnika r.

2. Cilindrične površi

Cilindrična površ u prostoru je skup tačaka svih pravih koje sijeku zadatu liniju L, a prave koje sijeku liniju (krivu) L su istovremeno paralelne datom fiksiranom vektoru $\vec{s}$.

Pravu paralelnu vektoru $\vec{s}$ nazivamo izvodnicom ili generatrisom, a zadatu liniju L vodiljom ili direktrisom.





$\vec{s}=(m,n,p)$

$d: \begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ direktrisa

Jednačina generatrise (prave paralelne vektoru $\vec{s}$) je:

$$\frac{X-x}{m}=\frac{Y-y}{n}=\frac{Z-z}{p}$$ - generatrisa

Iz parametarske jednačine generatrise izrazimo promjenljive x, y, z:

$$\begin{cases} x = X - mt \\ y = Y - nt \\ z = Z - pt \end{cases}$$

Zamijenimo u prvu jednačinu direktrise (prva površ):

$F_1(X-mt, Y-nt, Z-pt)=0$. Odavde nađemo t.

Tada je $t=g(X,Y,Z)$. Vratimo vrijednost za t u parametarsku jednačinu generatrise, a zatim to novo x, y i z ~~za~~ uvrstimo u drugu jednačinu generatrise (druga površ):

$$F_2\big(X-mg(X,Y,Z),\ Y-n\cdot g(X,Y,Z),\ Z-pg(X,Y,Z)\big)=0$$

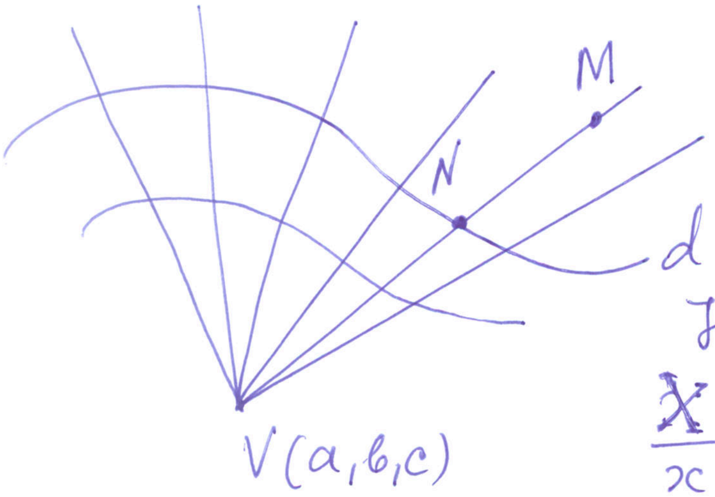
– je jednačina cilindrične površi

Primjer Naći jednačinu cilindrične površi čija je direktrisa
$$d: \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$$
, a generatrisa $\vec{s} = (1,2,1)$.

Rješenje Jednačina generatrise je
$$\frac{X-x}{1} = \frac{Y-y}{2} = \frac{Z-z}{1} = t$$
Parametarske jednačine po x, y, z:
$$\begin{cases} x = X - t \\ y = Y - 2t \\ z = Z - t \end{cases}$$
Zamijenimo ovo u drugu jednačinu direktrise $x+y+z-3=0$:
$$X - t + Y - 2t + Z - t - 3 = 0$$
Odavde izrazimo t po promjenljivim X, Y i Z:
$$t = \frac{1}{4}(X + Y + Z - 3)$$
Vratimo ovo u parametarske jednačine generatrise:
$$x = X - \frac{1}{4}(X+Y+Z-3) = \frac{1}{4}(3X - Y - Z + 3)$$
$$y = Y - \frac{1}{2}(X+Y+Z-3) = \frac{1}{2}(-X + Y - Z + 3)$$
$$z = Z - \frac{1}{4}(X+Y+Z-3) = \frac{1}{4}(-X - Y + 3Z + 3)$$
Zamijenimo x, y, z u prvu jednačinu direktrise i tako dobijamo jednačinu tražene cilindrične površi
$$z = x^2 + y^2 \Rightarrow$$
$$\boxed{\frac{1}{4}(-X - Y + 3Z + 3) = \frac{1}{16}(3X - Y - Z + 3)^2 + \frac{1}{4}(-X + Y - Z + 3)^2}$$

3. Konusne površi

Konusna površ u prostoru je skup tačaka svih pravih koje prolaze kroz fiksiranu tačku V, koju nazivamo vrhom, a sijeku datu krivu d, koju nazivamo direktrisom.



$M(X,Y,Z)$
$N(x,y,z)$
$V(a,b,c)$

Jednačina prave VN:

$$\frac{X-a}{x-a}=\frac{Y-b}{y-b}=\frac{Z-c}{z-c}=t$$

$$d:\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

Iz parametarskih jednačina prave kroz tačke V i N dobijamo:
$$\begin{cases} x=\dfrac{X-a}{t}+a \\ y=\dfrac{Y-b}{t}+b \\ z=\dfrac{Z-c}{t}+c \end{cases}$$

Ovo uvrstimo u prvu jednačinu (prvu površ) direktrise

$$F_1\left(\frac{X-a}{t}+a,\ \frac{Y-b}{t}+b,\ \frac{Z-c}{t}+c\right)=0$$

Odavde nađemo $t=g(X,Y,Z)$ i zamijenimo sada x,y i z u jednačinu $F_2(x,y,z)=0$ i dobijamo jednačinu konusne površi:

$$F_2\left(\frac{X-a}{g(X,Y,Z)}+a,\ \frac{Y-b}{g(X,Y,Z)}+b,\ \frac{Z-c}{g(X,Y,Z)}+c\right)=0.$$

Primjer Naći jednačinu konusne površi čiji | 4
je vrh u tački $V(0,-1,0)$, a direktrisa kriva:

$$d: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ y+z=1 \end{cases}$$

Rješenje Jednačina prave kroz tačke V i $N(x,y,z)$ je:

$$\frac{X}{x} = \frac{Y+1}{y+1} = \frac{Z}{z} = t$$

Parametarski:
$$\begin{cases} x = \dfrac{X}{t} \\ y = \dfrac{Y+1}{t} - 1 \\ z = \dfrac{Z}{t} \end{cases}$$

Uvrstimo ovo u drugu jednačinu direktrise $y+z=1$:

$$\frac{Y+1}{t} - 1 + \frac{Z}{t} = 1 \quad / \cdot t$$

$$Y+1-t+Z=t$$

$$t = \frac{1}{2}(Y+Z+1)$$

Odavde je

$$x = \frac{2X}{Y+Z+1}$$

$$y = \frac{2Y+2-Y-Z-1}{Y+Z+1} = \frac{Y-Z+1}{Y+Z+1}$$

$$z = \frac{2Z}{Y+Z+1}$$

Zamijenimo x, y, z u ~~je~~ drugu jednačinu direktrise:

$$\frac{4X^2}{(Y+Z+1)^2} + \frac{Y-Z+1}{(Y+Z+1)^2} + \frac{4Z^2}{(Y+Z+1)^2} = 1$$

Odnosno,

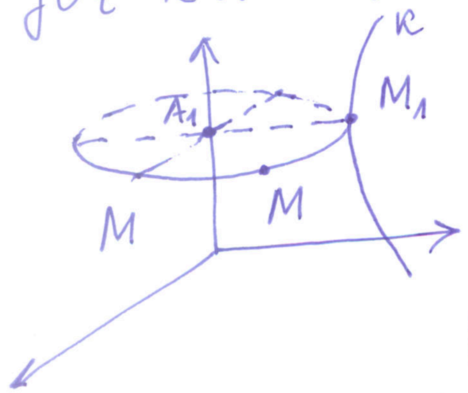
$$4X^2 + (Y-Z+1)^2 + 4Z^2 = (Y+Z+1)^2$$

što i jeste jednačina konusne površi.

4. Rotacione površi

Neka je data kriva (k) u prostoru i prava p koju nazivamo osom rotacije. Skup tačaka krive (k) koje rotiraju oko prave p obrazuju površ koju nazivamo rotacionom površi.

Razmotrimo sada rotaciju krive (k) koja leži u yOz ravni oko Oz ose.



$$(k): \begin{cases} F(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

Proizvoljna tačka sa rotacione površi $M(X,Y,Z)$.

Tačka M_1 sa krive (k) na istoj visini kao i M ima koordinate $M_1(0,y_1,z_1)$ $\quad Z=z_1$

$A_1(0,0,z_1)$ je tačka sa Oz ose na istoj z-visini kao i tačke M i M_1.

Znamo da je rastojanje od A_1 do M_1 jednako rastojanju od A_1 do M.

$$|A_1M_1| = |A_1M| \qquad |A_1M_1| = |y_1|$$
$$|A_1M_1| = \sqrt{X^2+Y^2}$$

znači $\quad y_1 = \pm\sqrt{X^2+Y^2}$

$F(\pm\sqrt{X^2+Y^2}, Z)=0$ je jednačina rotacione površi čija je osa rotacije Oz osa.

Da je naša kriva (k) rotirala oko Oy ose onda bi jednačina rotacione površi bila

$$F(Y, \pm\sqrt{X^2+Z^2})=0.$$

Primjer Naći jednačinu rotacione površi koja nastaje rotacijom krivih:

a) $\begin{cases} z = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} z = e^{-x^2} \\ y = 0 \end{cases}$ oko Oz ose.

Rješenje

$$\begin{aligned} x &\longmapsto \pm\sqrt{x^2+y^2} \\ z &\longmapsto z \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} &a)\ z = x^2+y^2 \\ &b)\ z = e^{-x^2-y^2} \end{aligned}$$

Površi drugog reda

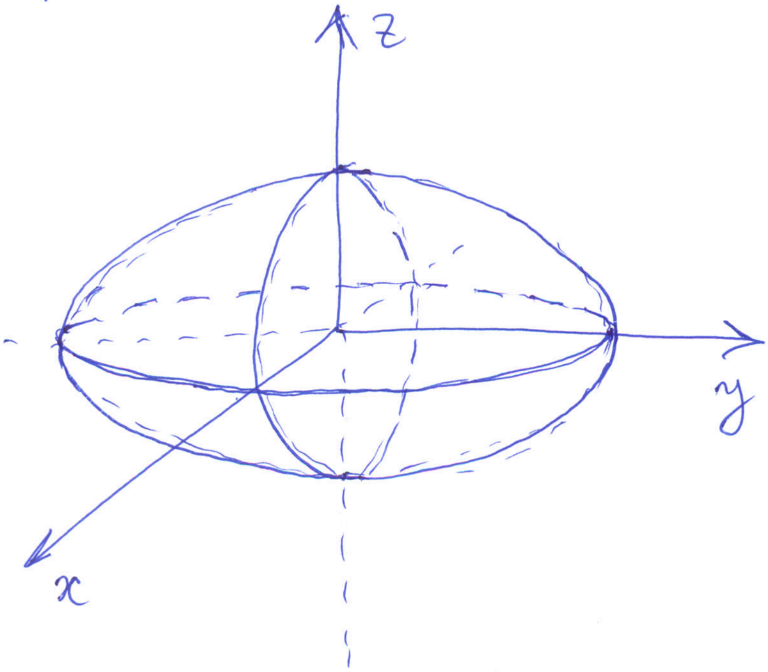
Opšta jednačina površi drugog reda je

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fxz+Gx+Hy+Iz+J=0$$

gdje $A^2+B^2+C^2+D^2+E^2+F^2 \neq 0$.

Površi drugog reda zadate u kanonskom obliku:

1) elipsoid $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $a>0, b>0, c>0$

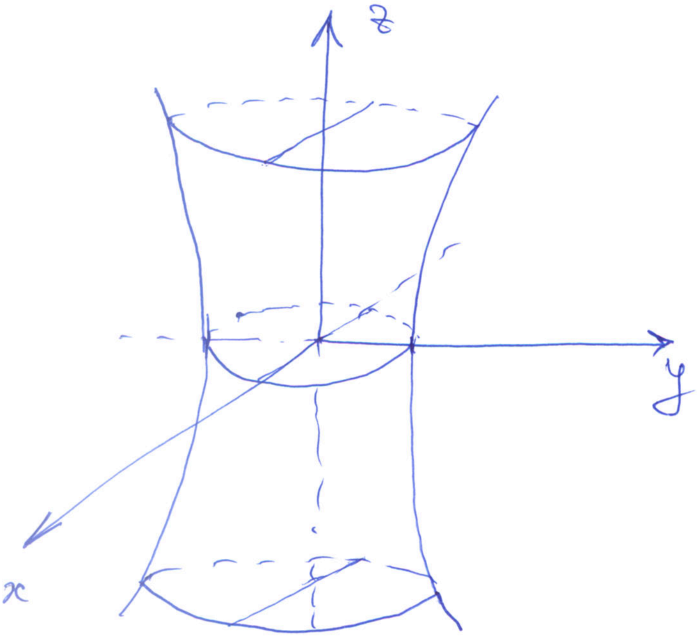


Presjeci elipsoida sa koordinatnim osama su elipse.

Elipsoid možemo dobiti, na primjer, rotacijom elipse $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$ oko Ox ose

2) Jednograni hiperboloid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad , a>0, b>0, c>0$$



U presjeku sa koordinatim osama:

sa xOy je elipsa

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

sa xOz osom je hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

sa yOz osom je hiperbola

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

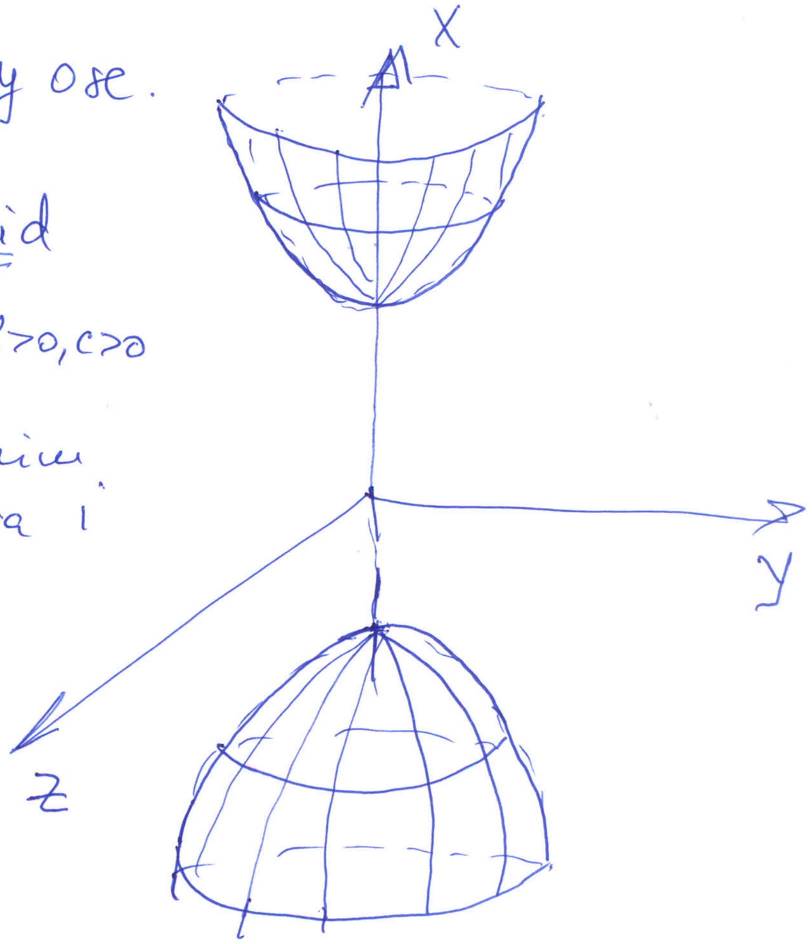
Jednograni hiperboloid možemo dobiti i rotacijom, na primjer, hiperbole

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0\end{cases}$$ oko Oy ose.

3) Dvograni hiperboloid

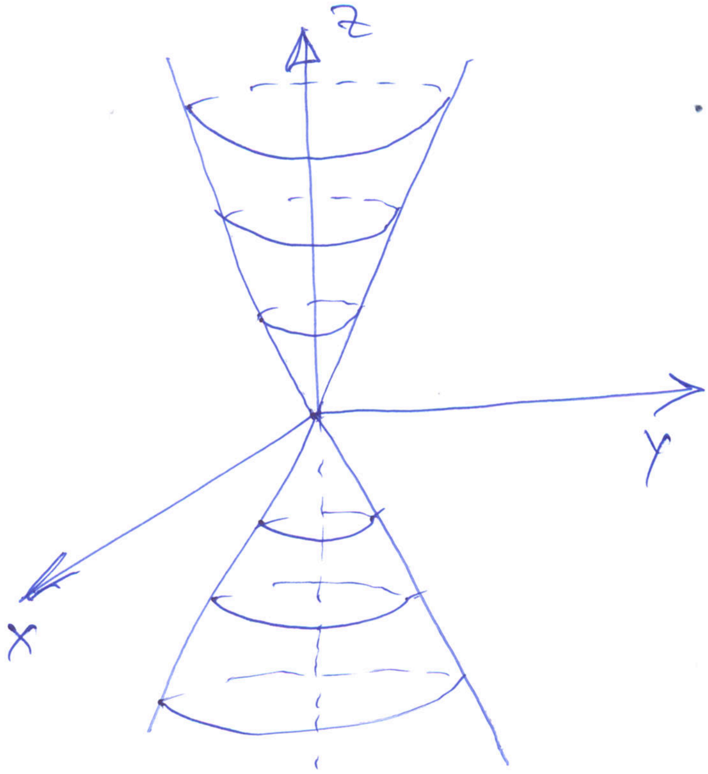
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad a>0, b>0, c>0$$

U presjeku sa koordinatnim osama se dobija elipsa i dvije hiperbole



4) Konus drugog reda

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,\ a>0,\ b>0,\ c>0$$

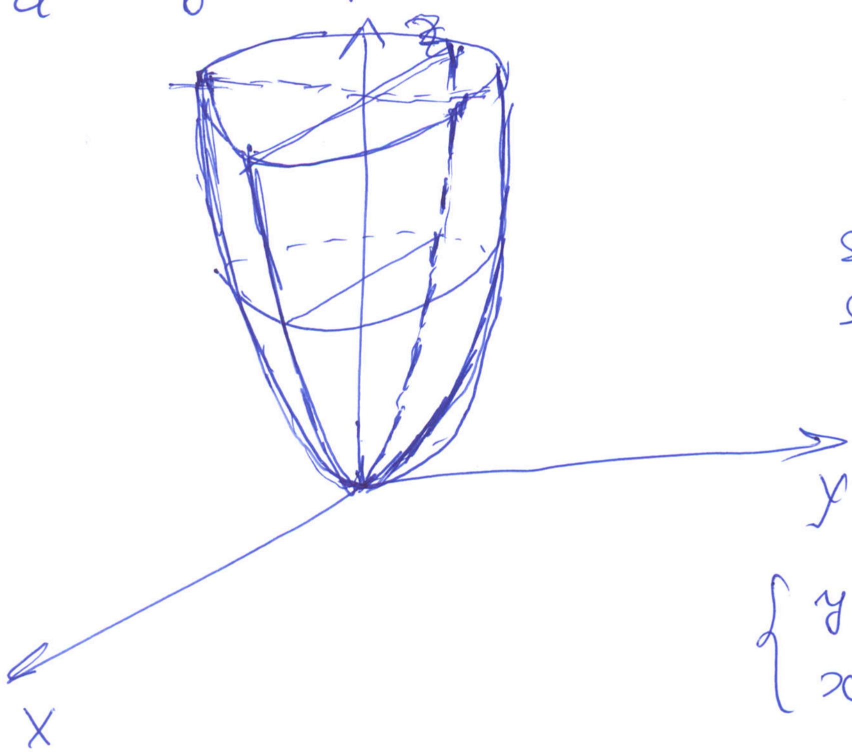


U presjeku sa koordin. osama:
sa xOy osom je tačka $(0,0,0)$.
sa xOz osom su prave ~~y~~ $x=\pm\frac{a}{b}z$
sa yOz osom su prave $y=\pm\frac{b}{c}z$.

Konus se može dobiti i rotacijom, na primjer, prave $\begin{cases} y=kx \\ z=0 \end{cases}$ oko Oy ose.

5. Eliptički paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz,\ a>0,\ b>0$$

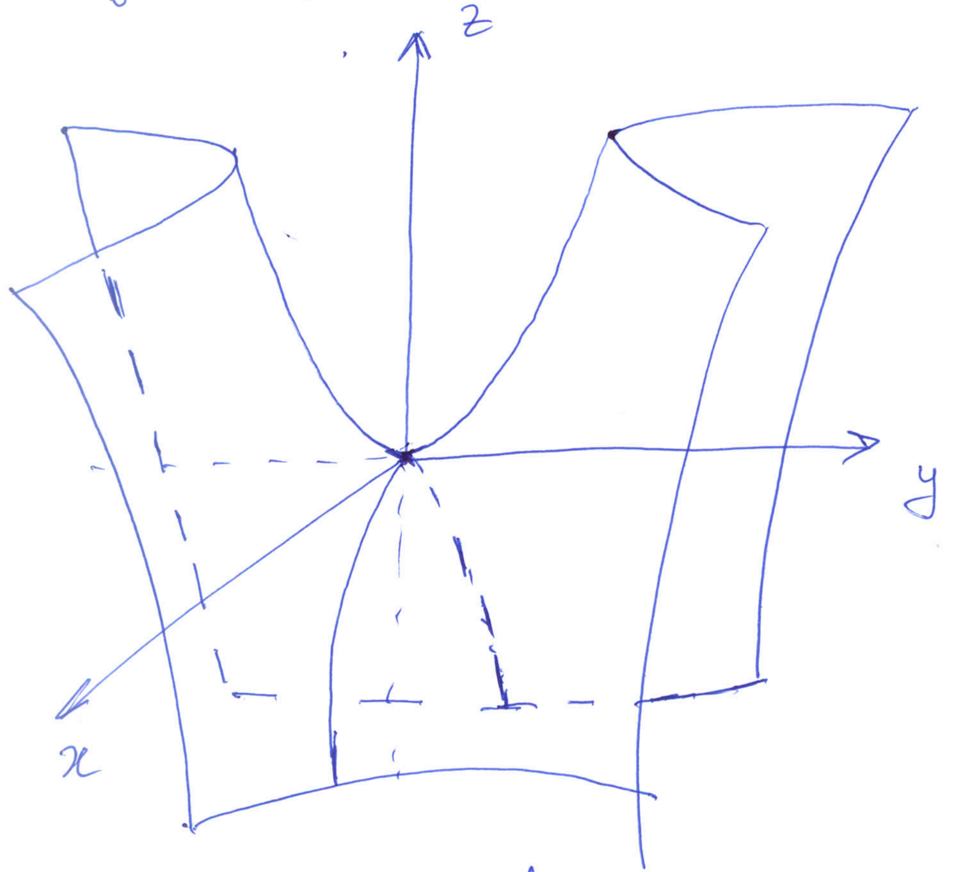


U presjeku sa koordinatnim osama se dobija:
sa $z=h,\ h>0$ elipsa,
sa xOz parabola
sa yOz ravni parabola

Može da se dobije i rotacijom, na primjer, parabole $\begin{cases} y^2=2pz \\ x=0 \end{cases}$ oko Oz ose.

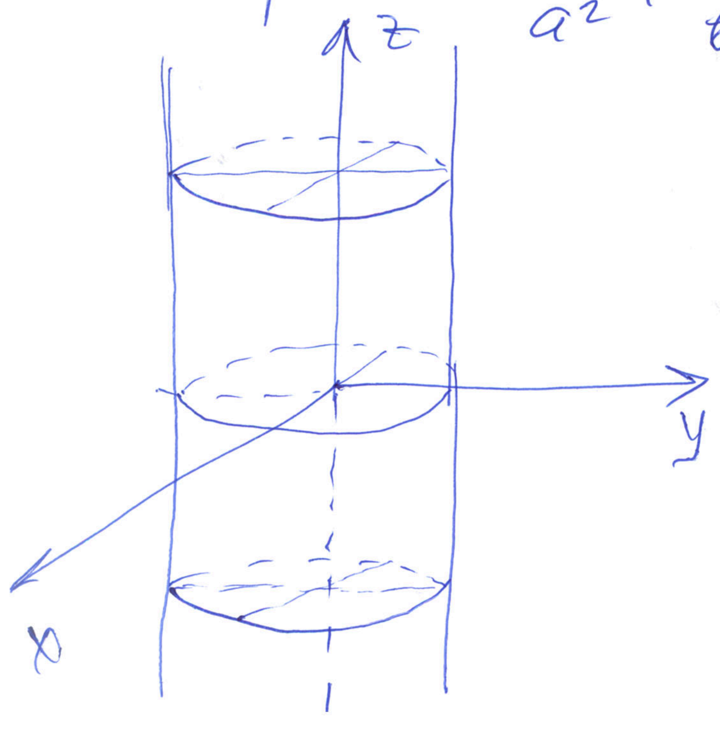
6) hiperbolički paraboloid (sedlo)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz \,,\ a>0,\ b>0$$



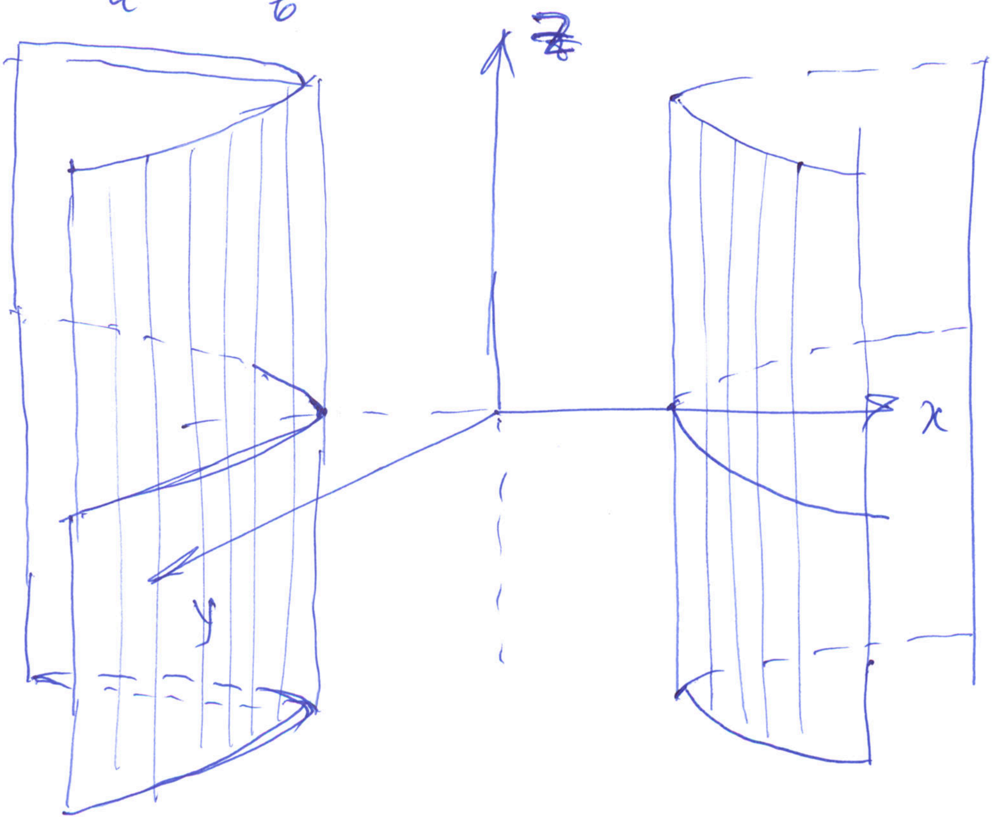
U presjeku sa koordinatnim osama se dobiju:
sa xOy osom tačka (sa ravni $z=h$ hiperbola)
sa yOz osom parabola, a sa xOz osom takođe parabola.

7) Cilindar eliptički $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a>0$, $b>0$



8) hiperbolički cilindar

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a>0, \; b>0$$



9) Parabolički cilindar

$$y^2 = 2px$$